Ejercicios del Tema de Funciones
Cálculo Diferencial e Integral I

1. Realizar lo siguiente:

a) ¿Qué significa que f sea una función de A en B?.

b) Escribir la definición de función inyectiva y muestre un ejemplo.

c) Escribir la definición de función suprayectiva y muestre un ejemplo.

d) Exhibir un ejemplo de una regla de correspondencia entre dos conjuntos, que no sea una función.

2. Realizar lo siguiente:

a) Escribir la definición de función par y de función impar.

b) Escribir la definición de función acotada.

c) ¿Cualquier función real de variable real, debe ser par o impar?.

d) Un requisito importante para definir las funciones monótonas es que su dominio debe ser _______________.

e) Exhibir un ejemplo de una función real de variable real, que no sea monótona.

f) Exhibir un ejemplo de una función real de variable real, que sea inyectiva, pero que no sea monótona.

3. Investigar si las siguientes funciones con dominio $\mathbb{R}$, son inyectivas, suprayectivas o biyectivas. Justificar detalladamente sus respuestas.

$i)\ f(x)=[x]+x$ $\quad ii)\ f(x)=x^3$ $\quad iii)\ f(x)=-x+3$

$iv)\ f(x)=\operatorname{sen}(x)$ $\quad v)\ f(x)=x^2-2x$ $\quad vi)\ f(x)=\cos(x)$

4. Dadas las funciones $f(x)=x\ \forall \in \mathbb{R}$ y $g(x)=[x]\ \forall\ x\in[-2,3]$, dibujar las gráficas de $f+g$ y $f-g$. Es importante considerar sus dominios.

5. Investigar si las siguientes funciones con dominio en $\mathbb{R}$, son pares o impares. Justificar detalladamente sus respuestas.

$i)\ f(x)=x^3$ $\quad ii)\ f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ $\quad iii)\ f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ $\quad iv)\ f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$

6. Investigar si las siguientes funciones con dominio en $\mathbb{R}$, son o no acotadas. Justificar detalladamente sus respuestas.

$i)\ f(x)=x^3$ $\quad ii)\ f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ $\quad iii)\ f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ $\quad iv)\ f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$

7. Demuestre que las siguientes funciones son monótonas (creciente o decreciente) en el intervalo $[0,\infty]$.

$i)\ f(x)=x^2$ $\quad ii)\ f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ $\quad iii)\ f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ $\quad iv)\ f(x)=|x|$

8. Esbozar las gráficas de las siguientes funciones, trazando un número de puntos suficiente para obtener una buena idea del aspecto general.

(Una parte del problema consiste en hacer una estimación acerca de cuántos puntos serían "suficientes": Los interrogantes que se ponen tienen por objeto hacer ver que vale más discurrir un poco que trazar centenares de puntos).

i) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ ¿Qué ocurre cuando x está próximo a 0 y cuando x es grande?. ¿Qué posición ocupa la gráfica en relación con la gráfica de la función identidad?. ¿Porqué es suficiente considerar primero sólo x positivos?.

ii) $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$ *iii)* $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$ *iv)* $f(x)=x^2-\dfrac{1}{x^2}$

9. Describir la gráfica de g en términos de la gráfica de $f(x)=x^2$ si

i) $g(x)=f(x)+c$

ii) $g(x)=f(x+c)$
¡Cuidado, es fácil equivocarse!

iii) $g(x)=cf(x)$
Distinguir los casos:
$c=0,\ c>0,\ c<0.$

iv) $g(x)=f(cx)$
Distinguir los casos:
$c=0,\ c>0,\ c<0.$

v) $g(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

vi) $g(x)=f(|x|)$

vii) $g(x)=|f(x)|$

viii) $g(x)=max(f,0)$

ix) $g(x)=min(f,0)$

x) $g(x)=max(f,1)$

10. Sea $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$. Interpretar lo siguiente:

i) $f(f(x))$
¿Para que x tiene sentido?

ii) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

iii) $f(cx)$

iv) $f(x+y)$

v) $f(x)+f(y)$

vi) $f(|x|)$

11. Sea $g(x)=x^2$ y sea

$$h(x)=\begin{cases}0, & x \text{ racional}\\ 1, & x \text{ irracional}\end{cases}$$

i) ¿*Para cuáles* y *es* $h(y)\leq y$?

ii) ¿*Para cuáles* y *es* $h(y)\leq g(y)$?

iii) ¿*Qué es* $g(h(z))-h(z)$?

iv) ¿*Para cuáles* w *es* $g(w)\leq w$?

v) ¿*Para cuáles* ε *es* $g(g(\varepsilon))=\varepsilon$?

12. Encontrar el dominio de las funciones definidas por las siguientes fórmulas.

i) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

ii) $f\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$

iii) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}$

iv) $f(x)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2-1}$

$v)\ f(x)=\sqrt{1-x}+\sqrt{x-2}$

13. Sean $S(x)=x^2$**,** $P(x)=2^x$ **y** $s(x)=sen(x)$, $f(x)=\sqrt{x}$ **y** $g(x)=2x+3$**. Calcular lo siguiente:**

$i)\ (S\circ P)(y)$	$ii)\ (S\circ s)(y)$	$iii)\ (f\circ g)(u)$
$iv)\ (S\circ P\circ s)(t)+(s\circ P)(t)$	$v)\ s(t^3)$	$vi)\ (g\circ f)(u)$
$vii)\ (f\circ g)(v)+(g\circ f)(v)$	$viii)\ f^{-1}(x)$	$ix)\ g^{-1}(x)$

14. Indícar sobre una recta el conjunto de todas las x **que satisfacen las siguientes condiciones. Dar también un nombre a cada conjunto, utilizando la notación para los intervalos (en algunos casos será necesario también el signo** $\cup$**).**

i) $|x-3|<1$ **ii)** $|x-3|\leq 1$ **iii)** $|x-a|<\varepsilon$ **iv)** $|x^2-1|<\dfrac{1}{2}$

v) $\dfrac{1}{1+x^2}\geq\dfrac{1}{5}$ **vi)** $x^2+1\geq 2$ **vii)** $(x+1)(x-1)(x-2)>0$

Julio de 2010